Variabelsammenhænge og grafer

Indhold

Variable

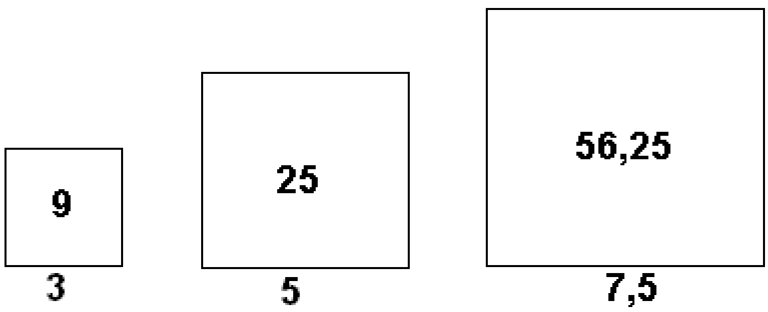
I matematik taler vi ofte om variable talstørrelser. Det kan fx være temperaturen målt i celsius-grader, der varierer i løbet af året. En talstørrelse, der varierer kaldes en **variabel.**

Et kvadrat er en firkant hvor alle vinkler er 90° og alle sider lige lange.
Lad os tegne et kvadrat på et stykke papir, der er 7,5 cm på hver led.
Hvis vi regner i cm, kan sidelængden variere fra 0 og op til 7,5.

Arealet kan variere fra 0 og op til 56,25.
Arealet af kvadratet afhænger af sidelængden og kaldes **den afhængige variable** mens sidelængden kaldes **den uafhængige variable**.
Hvis vi kalder arealet y og sidelængden x, bliver arealet y bestemt ved regneforskriften: $\mathbf{y = x^2}$ (x^2 betyder $x \cdot x$, fx 5^2 betyder $5 \cdot 5$) .

Funktion

Man siger, at arealet **y** er en **funktion**



af x.

Det skrives **y = f(x)** og udtales "**y er lig f af x**"

Regneforskriften kan også skrives $\mathbf{f(x) = x^2}$.

Funktionen er defineret for alle tal x i intervallet 0 til og med 7,5.
Mængden af de tal x, hvor funktionen er defineret kaldes **definitionsmængden**.
Definitionsmængden for en funktion med navnet f kan forkortet skrives **Dm(f)**

Ud fra regneforskriften **$f(x) = x^2$** får vi

Hvis x er 3 så er $y = f(3) = 3^2 = 9$ og hvis x er 4 så er $y = f(4) = 4^2 = 16$
Vi siger funktionsværdien af 3 er 9 og funktionsværdien af 4 er 16

Mængden af alle funktionsværdierne kaldes **værdimængden** for f og er intervallet fra 0 til og med 56,25..
Værdimængden for en funktion med navnet f kan forkortet skrives **Vm(f)**

Grafen for en funktion

Ofte vil man præsentere en funktion grafisk.
Hvis man vil tegne funktionen med regneforskriften $y = x^2$, er det en god ting at starte med at udfylde et såkaldt sildeben med forskellige samhørende
x- og y-værdier, såkaldte støttepunkter:
Selvom 0 ikke tilhører definitionsmængden, kan det være praktisk at have 0 med i sildebenet, men vi skriver 0 i parentes: (0). Den tilsvarende *y-værdi*, som også er 0 sættes ligeledes i parentes.

Støttepunkter for $y = x^2$.

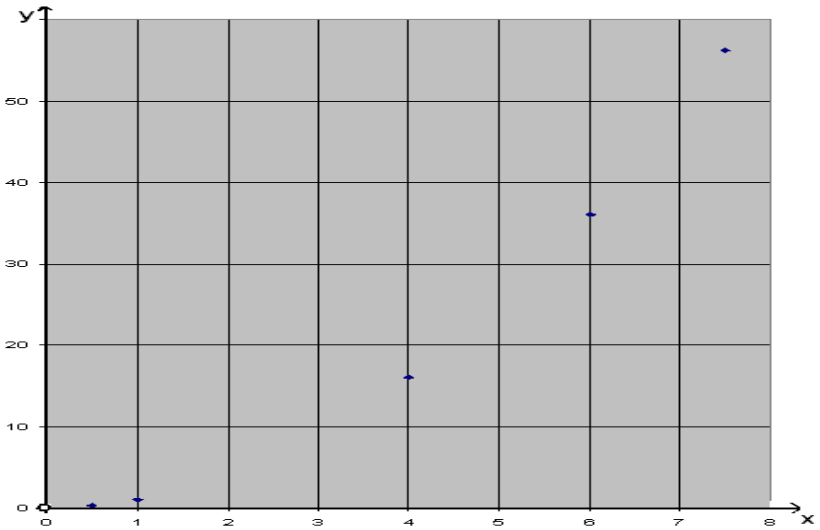
x	(0)	0,5	1	4	6	7,5
y	(0)	0,25	1	16	36	56,25

Den første og sidste *x-værdi* er de to endepunkter i definitionsintervallet. Resten af *x-værdierne* er valgt så de fordeler sig nogenlunde jævnt i definitionsmængden.
Når man skal tegne en graf vælger man selv *x-værdier*.

Vi vil tegne et billede (en graf) af funktionen i et såkaldt koordinatsystem.

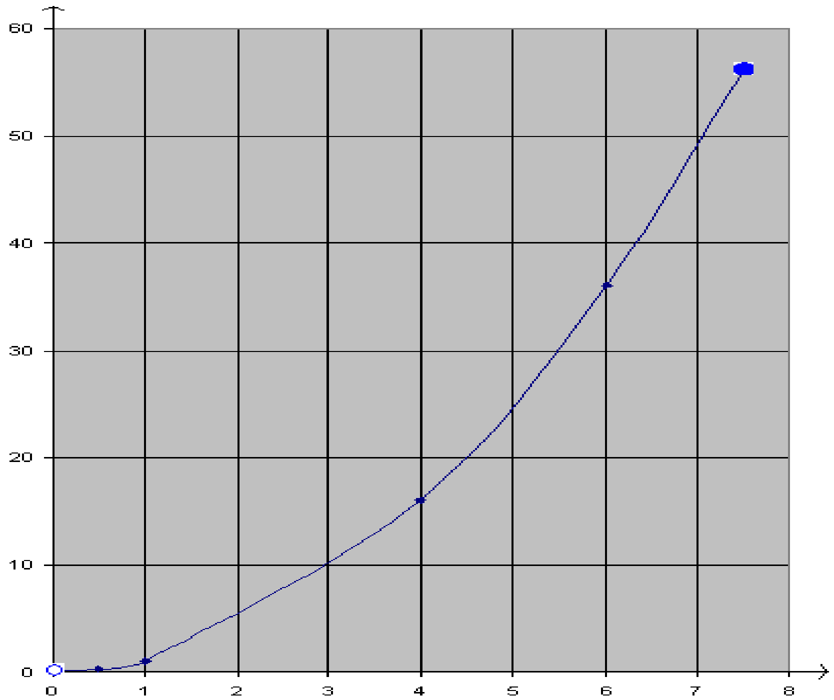
Et **koordinatsystem** består af 2 tallinjer vinkelret på hinanden.
Den ene tallinje kaldes ***x-aksen*** og den anden ***y-aksen***.

Hvert støttepunkt plantes ud for sin *x-værdi* på *x-aksen* og ud for sin *y-værdi* på *y-aksen.*



Punktet med *x-værdien* 0 er afsat med en ring fordi 0 ikke ligger i definitionsmængden. De øvrige punkter ligger på den graf vi vil tegne.

Når vi skal tegne grafen, vil vi som regel vælge at tegne en blød kurve gennem støttepunkterne:



Ved at forbinde grafpunkterne med en blød kurve forestiller vi os at have tegnet de punkter hvor $y = x^2$, idet x for hvert punkt betyder punktets placering ud for *x-aksen* mens y er punktets placering ud for *y-aksen*.
Denne antagelse giver imidlertid ikke et præcist billede af grafen. Fx ser det overfor ud som om f(x) er 10; men f(3) er faktisk 9.

Ethvert punkt i koordinatsystemet er bestemt ved et talar ***(x, y)*** der kaldes punktets **koordinatsæt**.
x er punktets placering ud for *x-aksen* (også kaldet 1. aksen) og kaldes punktets *x-værdi* (eller punktets 1. koordinat).
y er punktets placering ud for *y-aksen* (også kaldet 2. aksen) og kaldes punktets *y-værdi* (eller punktets 2. koordinat).

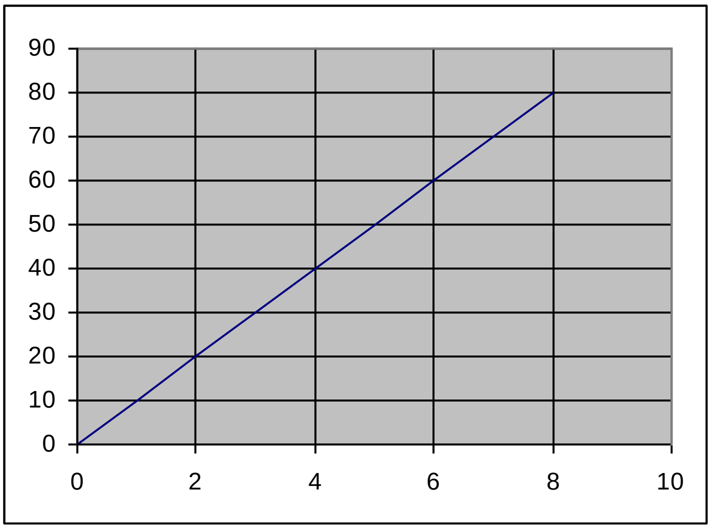
Fx er ***(5 , 2.5)*** punktet ud for ***5*** på *x-aksen* og ud for ***2.5*** på *y-aksen* (Der er brugt decimalpunktum i stedet for decimalkomma. Det gøres ofte.)

I punktet ***(0 , 0)*** er tegnet en ring. Det betyder, at punktet ikke hører med til grafen..
I punktet ***(7.5 , 56.25)*** er egnet en bolle. Det betyder, at punktet hører med til grafen.

Proportionalitet

”Ligefrem proportional” eller blot ”proportional”

Hvis man køber benzin til 10 kr pr. liter, vil prisen i kroner være 10 gange så stor som antal liter.
Hvis antal liter kaldes x og prisen kaldes y, gælder $y=10x$.
Vi siger y er **proportional** eller **ligefrem proportional** med x og at **proportionalitetsfaktoren** er 10.
For $x \geq 0$ ser grafen for y således ud:



Omvendt proportionalitet

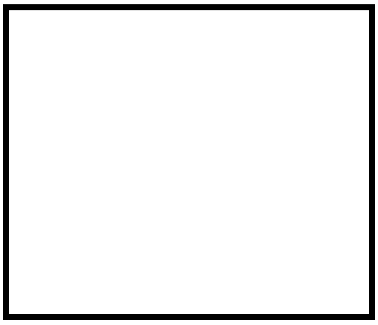
Hvis vi har 420 havefliser og vil lave en terrasse kan vi fx lægge 42 fliser på den ene led og 10 fliser på den anden.
Terrassen er et såkaldt rektangel. Se tegningen, hvor $x = 42$ og $y = 10$.

y = 10

x = 42

Vi kan også vælge at lægge 21 fliser på den ene led og 20 på den anden.
Se tegning hvor $x=21$ og $y=20$.

y = 20



x = 21

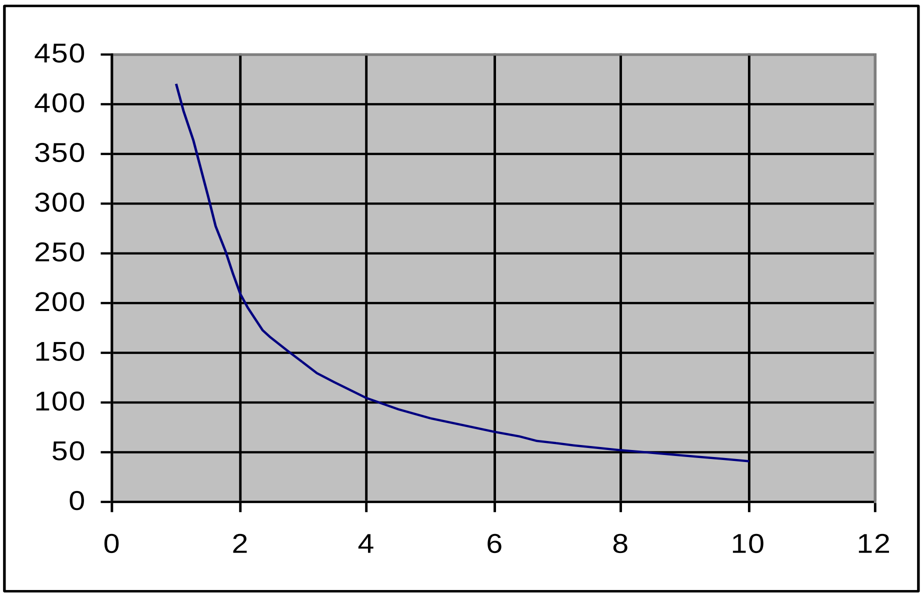
VI ser at når y gøres dobbelt så stor, så bliver x halv så stor.
Endvidere gælder, at hvis vi havde gjort y tre gange så stor altså til 30 så ville x blive tre gane så lille, nemlig 14.

Vi kunne også gøre x dobbelt så stor til 84, men så måtte vi også gøre y dobbelt så lille, nemlig 5.

Generelt gælder der følgende sammenhæng mellem x og y:

$$y = 420 \cdot \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = 420$$

Vi siger y og x er omvendt proportionale med proportionalitetsfaktoren 420
For x mellem 1 og 10 ser grafen for y således ud:



I ovenstående tilfælde med fliser er x større end nul.

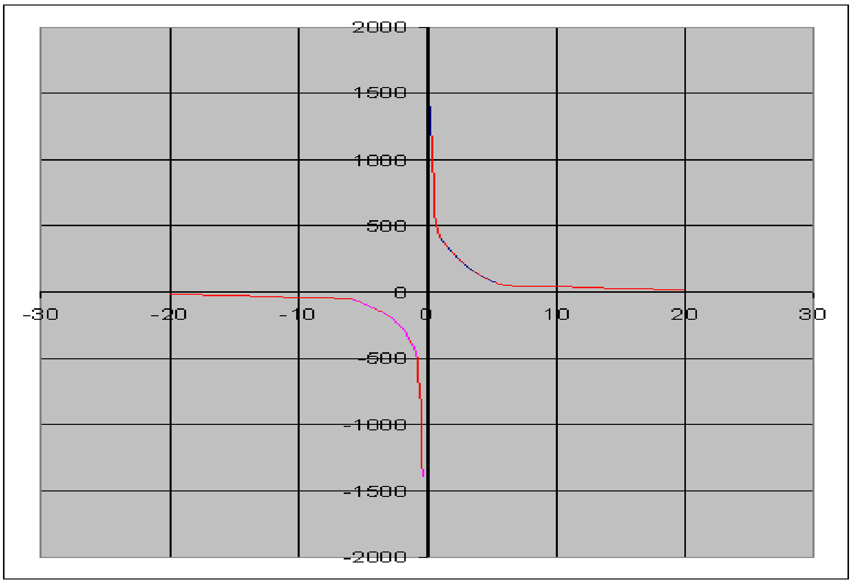
Bemærk: Regneudtrykket $y = 420 \cdot \frac{1}{x}$ har ingen mening for **x** lig nul;

men man kan godt beregne værdien af udtrykket for negative **x**.

For **x** forskellig fra nul ser grafen for **y** således ud:

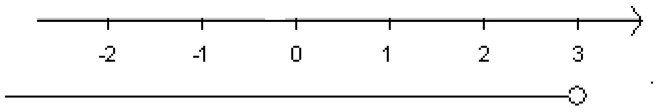
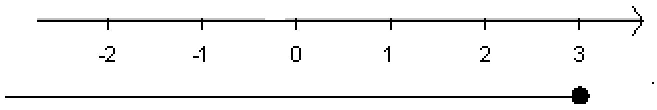
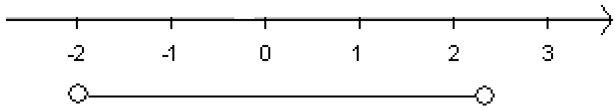
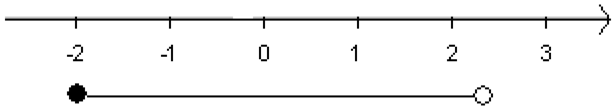
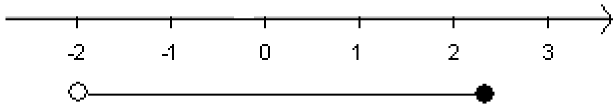
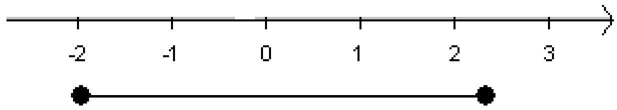
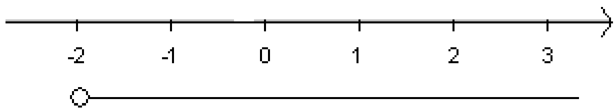
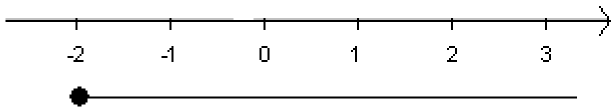
Bemærk: Grafen til højre illustrerer ikke flise-eksemplet, hvor **x** > 0 ; men blot variabelsammenhængen:

$$y = 420 \cdot \frac{1}{x}$$



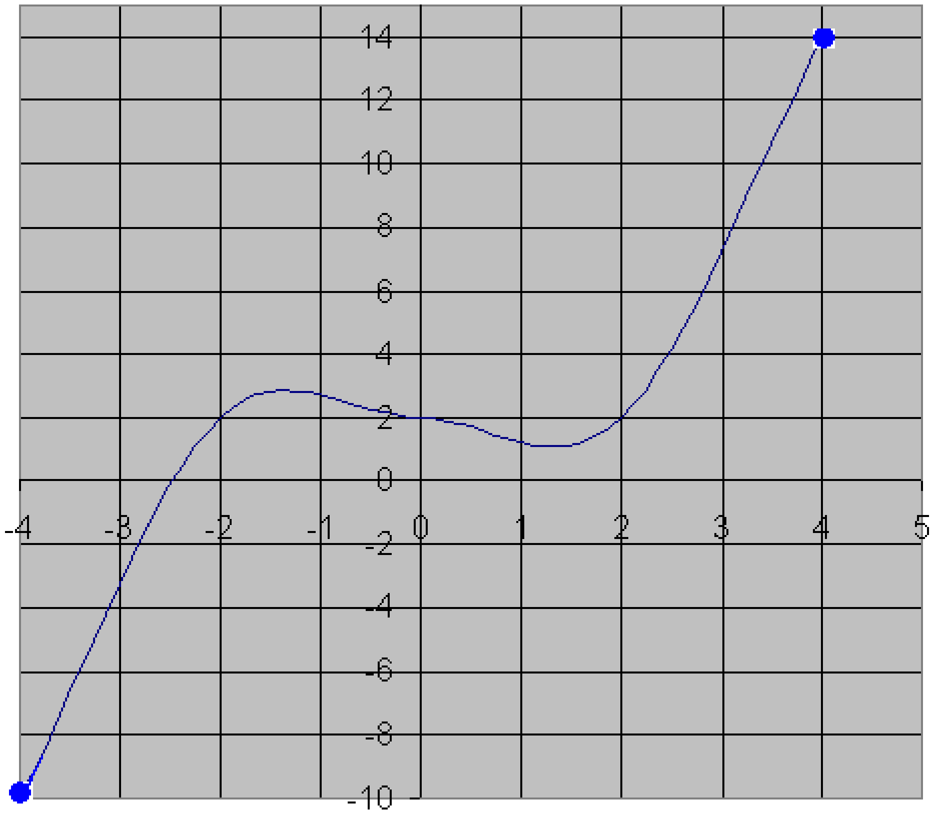
Intervaller

Ofte vil definitionsmængden og værdimængden være intervaller.
Ved intervaller benyttes nogle matematiske symboler, hvis betydning fremgår af følgende eksempler:

Interval-eksempel	**Forklaring**	**Grafik**
] -∞ , 3[	Åbent interval bestående af alle tal mindre end 3	
] -∞ , 3]	Halvåbent interval bestående af alle tal mindre end eller lig med 3	
]-2 ; 2,3[	Åbent interval bestående af alle tal mellem -2 og 2,3	
[-2 ; 2,3[	Halvåbent interval bestående af alle tal større end eller lig -2 og mindre end 2,3	
]-2 ; 2,3]	Halvåbent interval bestående af alle tal større end -2 og mindre end eller lig 2,3	
[-2 ; 2,3]	Lukket interval bestående af alle tal større end eller -2 og mindre end eller lig 2,3	
]-2 ; ∞[	Åbent interval bestående af alle tal større end -2	
[-2 ; ∞[	Åbent interval bestående af alle tal større end eller lig -2	

Opgaver

Betragt nedenstående graf for funktionen ***f*** og løs de følgende opgaver



<u>Opgave 1</u>

Udfyld de tomme felter

x	-4	-2	0	2	
y = f(x)					14

<u>Opgave 2</u>

Find *f(-2)*

f(-2) =

<u>Opgave 3</u>

Løs ligningen: f(x)=14

x =

<u>Opgave 4</u>

Løs ligningen: f(x)=2 Der er 3 løsninger, som kan skrives i en tuborgparentes, også kaldet mængdeklamme og adskilles med komma.

Løsningsmængden = { , , }

Opgave 5
Hvad er definitionsmængden?
Dm(*f*) = [ ]

Opgave 6
Hvad er værdimængden?
Vm(*f*) = [ ]

Facits:

Opgave 1

x	-4	-2	0	2	4
Y=f(x)	-10	2	2	2	14

Opgave 2
Find $f(-2)$: $f(-2) = 2$

Opgave 3
Løs ligningen: $f(x)=14$: $x=4$

Opgave 4
Løs ligningen: $f(x)=2$ Der er 3 løsninger, som kan skrives i en tuborgparentes.
Løsningsmængden = {-2, 0, 2}

Opgave 5
Dm(*f*) = [-4; 4]

Opgave 6
Vm(*f*) = [-10; 14]