Tallet *e* og *Ln*

Tallet e

Vi skal møde et helt specielt tal, som spiller en ganske stor rolle i matematikken.
Tallet kaldes **e** og er lig ca. 2,718.
Tallet kan ikke skrives som en endelig decimalbrøk. Det er et irrationalt tal, altså et ikke rationalt tal, hvilket vil sige, det ikke kan skrives som en brøk med helt tal for oven og helt tal for neden.

Den naturlige eksponentialfunktion

Tallet er især interessant når det optræder i den eksponentialfunktion, som har regneforskriften:

$$f(x) = e^x$$

Denne funktion kaldes den naturlige eksponentialfunktion og er karakteristisk ved at have sig selv som differentialkvotient. Dvs $f'(x) = e^x$ eller $(e^x)' = e^x$

e kan benyttes i RegneRobot. I nogle CAS-værktøjer skrives ***#e***

Den naturlige logaritme

Den naturlige logaritmefunktion betegnes ***Ln*,** og er bestemt ved:

Den naturlige logaritme til et **positivt tal** er den eksponent, man skal sætte på *e* for at få tallet.

DVS. $e^{Ln(x)} = x$

<u>Eksempler:</u>

$Ln(e^3) = 3$
$Ln(e^7) = 7$
$Ln(e^x) = x$
$Ln(e^a) = a$

$Ln(1) = 0$ fordi $e^0 = 1$
$Ln(e) = 1$ fordi $e^1 = e$

Logaritmeregler

$$Ln(a \cdot b) = Ln(a) + Ln(b)$$
$$Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Ln(a) - Ln(b)$$
$$Ln(a^x) = x \cdot Ln(a)$$

Disse regler er magen til reglerne for 10-talslogaritmen.
Nogen gange betegnes den naturlige logaritme med lille ***l*** således: ***ln***
Fx: $ln(1) = 0$

Eksponentielle funktioner

Vi vil nu omskrive $b \cdot a^x$, så e indgår.
Her får vi brug for en regel om eksponenter: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$, fx $(5^3)^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{3 \cdot 2}$

Vi har tidligere set at $x = e^{\ln(x)}$, idet $\ln(x)$ er den eksponent, man skal putte på e for at få x.

Ved at skrive a i stedet for x fås: $a = e^{\ln(a)}$

og $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) \cdot x}$

og $b \cdot a^x = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$

Derfor kan en eksponentiel funktion skrives på følgende form: $f(x) = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$

Differentialkvotient af eksponentielle funktioner

Der gælder: $(b \cdot a^x)' = \ln(a) \cdot b \cdot a^x$ (Det vil vi ikke bevise)

Specielt gælder: $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

Vi lægger mærke til, at differentialkvotienten af en eksponentiel funktion er proportional med funktionsværdien.
Endvidere gælder: $(b \cdot e^{nx})' = b \cdot n \cdot e^{nx}$ og $(b \cdot a^{nx})' = \ln(a) \cdot n \cdot b \cdot a^{nx}$
Det vil vi heller ikke bevise.

Eksempler:

$(2 \cdot 3^x)' = \ln(3) \cdot 2 \cdot 3^x$ og $(3^x)' = \ln(3) \cdot 3^x$

Se også link: Regler for differentiation Bemærk især: $(e^{nx})' = ne^{nx}$

På lommeregner Texas TI 89 og Voyage 200 kan $(2 \cdot 3^x)'$ findes ved at taste:

F3	*1*	*2*	*	*3*	^	*x*	*,*	*x*	*)*	*Enter*